2.7.16 Mocniny s iracionálním mocnitelem

Předpoklady: 020715

Pedagogická poznámka: Na příští hodinu hrozím písemkou na kvadratické rovnice (budou potřeba a bez upozornění s nimi někteří budou mít zbytečné problémy).

Nejdříve si dopočítáme pár příkladů z minulé hodiny.

Př. 1: Zjednoduš výraz $\dfrac{\left(x^{\frac{5}{4}}\cdot y^{\frac{9}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot z^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}\cdot y^{\frac{2}{3}}\cdot z^{-\frac{5}{6}}}$.

$$\frac{\left(x^{\frac{5}{4}}\cdot y^{\frac{9}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot z^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{3}{4}}\cdot y^{\frac{2}{3}}\cdot z^{-\frac{5}{6}}}=\frac{\left(x^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(y^{\frac{9}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{3}{4}}\cdot y^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{z^{-\frac{3}{4}}}{z^{-\frac{5}{6}}}=\frac{x^{\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{3}}\,y^{\frac{9}{8}\cdot\frac{2}{3}}}{x^{\frac{3}{4}}\,y^{\frac{2}{3}}}\,z^{-\frac{3}{4}-\left(-\frac{5}{6}\right)}=\frac{x^{\frac{10}{12}}\,y^{\frac{9}{12}}}{x^{\frac{9}{12}}\,y^{\frac{8}{12}}}\,z^{\frac{-9+10}{12}}=$$

$$=x^{\frac{10-9}{12}}\,y^{\frac{9-8}{12}}\,z^{\frac{-9+10}{12}}=x^{\frac{1}{12}}\,y^{\frac{1}{12}}\,z^{\frac{1}{12}}=(xyz)^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{xyz}$$

Př. 2: Zjednoduš výrazy převedením na racionální mocniny.

a) $\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$ b) $\sqrt{ab\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}$

a) $$\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}=\left(\frac{a}{b}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{6}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{b^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}}\cdot b^{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

b) $$\sqrt{ab\cdot\sqrt[4]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}=\left(ab\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(ab\cdot\frac{a^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{1}{4}}}\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}b^{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^{\frac{11}{12}}b^{\frac{13}{12}}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=a^{\frac{11}{24}}b^{\frac{13}{24}}$$

Pedagogická poznámka: Studenti mají s bodem a) předchozího příkladu pro mě nečekané problémy. Jednak špatně přepisují odmocniny takto $\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{b}{a}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ (někteří mají špatně opsané i zadání), jednak mají problém s tím, jestli mohou *a* dávat dohromady, když jsou ve dvou různých zlomcích.

Př. 3: Zjednoduš výrazy převedením na racionální mocniny:

a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ b) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

a) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = \left(2\left(2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} == \left(2\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2\cdot 2^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{2^7}$

b) $\sqrt[4]{4\sqrt[3]{2\sqrt{2}}} = \left(4\left(2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(2^2\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(2^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{2^5}$

Pedagogická poznámka: Nejvíce chyb pramení ze špatného přepisu odmocnin na závorky.

Jaké mocniny už umíme:

Přirozený mocnitel	a^3	$a^3 = a\cdot a\cdot a$
Celý mocnitel	a^{-2}	$a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a\cdot a}$
Mocnitel 0	a^0	$a^0 = 1$
Odmocnina	$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{1}{2}}$ je takové číslo, aby $\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$.
Racionální mocnitel	$a^{\frac{2}{3}} = \left(a^2\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$	$a^{\frac{2}{3}}$ je takové číslo, aby $\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^3 = \left(\left(a^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a^2$.

Pomocí racionálního mocnitele umíme vypočíst i hodně ošklivé věci:

$\sqrt[15]{3^7} = 3^{\frac{7}{15}}$ - Číslo, které když dáme na 15, vyjde $3^7 = 2187 \Rightarrow \sqrt[15]{3^7} = 3^{\frac{7}{15}} \doteq 1{,}669769737$.

Zkouška: $1{,}669769737^{15} = 2187{,}000006 \doteq 2187 = 3^7$.

Umíme určit mocninu na jakékoliv racionální číslo. Zbývají ještě čísla iracionální. Co by znamenalo $2^{\sqrt{2}}$?

Význam výrazu $2^{\sqrt{2}}$ závisí na významu výrazu $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ není možné napsat konečným desetinným rozvojem, ale můžeme dopočítat libovolný počet desetinných míst pomocí dvou číselných řad, které se stále přibližují a které ohraničují hodnotu $\sqrt{2}$.

$$1^2 = 1 < 2 < 4 = 2^2 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$$
$$1{,}4^2 = 1{,}96 < 2 < 2{,}25 = 1{,}5^2 \Rightarrow 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$
$$1{,}41^2 = 1{,}9881 < 2 < 2{,}0164 = 1{,}42^2 \Rightarrow 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$$
$$1{,}414^2 = 1{,}999396 < 2 < 2{,}002225 = 1{,}415^2 \Rightarrow 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$$
$$1{,}4142^2 = 1{,}99996164 < 2 < 2{,}00024449 = 1{,}4143^2 \Rightarrow 1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$$
$$1{,}41421^2 = 1.9999899241 < 2 < 2.0000182084 = 1{,}41422^2 \Rightarrow 1{,}41421 < \sqrt{2} < 1{,}41422$$

Takto můžeme za dlouhých zimních večerů pokračovat libovolně dlouho. Například při určování $\sqrt{2}$ na 100 míst:

$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667973799073247$
$846210703885038753432764157 3$

Teď už můžeme podobným způsobem aproximovat hodnotu $2^{\sqrt{2}}$. Využijeme přibližné hodnoty $\sqrt{2}$ z předchozího schématu:

$$2 = 2^1 < 2^{\sqrt{2}} < 2^2 = 4$$
$$2,6 < 2^{1,4} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,5} < 2,9$$
$$2,65 < 2^{1,41} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,42} < 2,68$$
$$2,664 < 2^{1,414} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,415} < 2,667$$
$$2,6651 < 2^{1,4142} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,4143} < 2,6654$$
$$2,66513 < 2^{1,41421} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{1,41422} < 2,66516$$

a tak dále. Za ještě delších zimních večerů můžeme určit hodnotu $2^{\sqrt{2}}$ klidně na sto desetinných míst:

$2^{\sqrt{2}} = 2.665144142690225188650297249873139848274211313714659492835979593364 9$
$2044617870595486760918000519641 7$

Poznámka: $2^{1,4}$, $2^{1,5}$ a další jsou opět iracionální čísla. Nemůžeme tedy uvést jejich přesnou hodnotu, proto u čísel nalevo od $2^{\sqrt{2}}$ používáme číslo určitě menší (dolní odhad) napravo pak číslo určitě větší (horní odhad).

Stejné výpočty můžeme provést i pro libovolné jiné iracionální číslo $\Rightarrow$ hodnotu výrazu a^r můžeme určit na libovolný počet desetinných míst pro každé $a \in R^+$ a $r \in R$ $\Rightarrow$ jako mocnitel můžeme použít libovolné reálné číslo.
Stejně tak platí i vzorce pro výpočty s mocninami:

Pro všechna kladná reálná čísla *a, b* a pro všechna reálná čísla *r, s* platí:

$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\quad$ $\left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s}$ $\quad$ $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ $\quad$ $(ab)^r = a^r \cdot b^r$

Př. 4: Vypočti bez použití kalkulačky:

a) $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ $\quad$ b) $\dfrac{2^{2+\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}-1}}$ $\quad$ c) $\left(\left(2^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}}$ $\quad$ d) $2^{2\sqrt{2}} \cdot 4^{1-\sqrt{2}}$

a) $\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 2^2 = 4$ $\quad$ b) $\dfrac{2^{2+\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{2}-1}} = 2^{2+\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}-1\right)} = 2^3 = 8$

c) $\left(\left(2^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(2^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}} = 2^6 = 64$

d) $2^{2\sqrt{2}} \cdot 4^{1-\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}} \cdot \left(2^2\right)^{1-\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}} \cdot 2^{2-2\sqrt{2}} = 2^{2\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}} = 2^2 = 4$

Př. 5: Petáková:
strana 63/cvičení 53 d) e) g) h)
strana 63/cvičení 54 g) h)

Shrnutí: Pro kladná reálná čísla můžeme zavést i mocniny s iracionálním mocnitelem.